

**Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet A)**

**Exercice 1.** *On considère les matrices  $A$  et  $B$  :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

*Calculer les produits  $AB$  et  $BA$  lorsque cela est possible :*

**Exercice 2.** *Soit  $A$  la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

*1. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$  :*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} b^i & b^n \end{pmatrix}$$

2. Calculer  $\sum_{i=0}^{n-1} b^i$  en fonction de  $b$  et  $n$  :

3. En déduire  $A^n$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  :

**Exercice 3.** Soient  $f_1 : E \rightarrow F$  et  $f_2 : F \rightarrow G$  deux fonctions.

1. Rappeler les définitions de :

(a)  $f_2 \circ f_1$  :

(b)  $f_1$  est injective :

2. Démontrer que si  $f_1$  et  $f_2$  sont surjectives alors  $f_2 \circ f_1$  l'est aussi.

**Exercice 4.** Soit  $E = \mathbb{N}^2$  l'ensemble des couples  $(n, m)$  d'entiers naturels. On définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  par :  $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$  si  $n + m' = n' + m$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2. Donner les classes d'équivalences de  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  :

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme différence  $n - m$  de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir  $n$  et  $m$ . Ainsi, les classes d'équivalences de  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  donnent respectivement les entiers relatifs 0, 1 et  $-1$ .

3. (Optionnel)

Montrer que si  $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$  et  $(p, q)\mathcal{R}(p', q')$  alors  $(n + p, m + q)\mathcal{R}(n' + p', m' + q')$ .

C'est cette propriété qui permet de définir l'addition sur  $\mathbb{Z}$  à partir de l'addition sur  $\mathbb{N}$ .